

# حركة منظومة جسيمات

(Motion of Systems of Particles)

## 4-1 تمهيد

درسنا في الفصول السابقة حركة جسيم صغير  $m$  على خط مستقيم أو في مستو أو في الفضاء ، ونعمم في الفصلين الرابع والخامس النتائج التي توصلنا إليها على منظومة مؤلفة من عدد نهائي من الجسيمات، أو على أجسام صلبة مؤلفة من عدد كبير جداً من الذرات. فنعرّف في هذا الفصل مركز كتلة منظومة جسيمات سواء كانت جسيمات نقطية محدودة العدد أم مؤلفة لأجسام صلبة ممتدة لانهاية العدد. ثم ندرس حركة مركز الكتلة هذا، فنحدد سرعته وتسارعه، ونستخرج قانون حركته. ثم نستخلص مبدأ حفظ الزخم الخطي وحفظ الزخم الزاوي للمنظومة جسيمات ، ونطبق ذلك على مسألة التصادم بين جسيمين ، سواء على خط مستقيم، أو في مستو، معرفين خلال ذلك التصادمات المرنة وغير المرنة وتششت زدرفورد.

## 4-2 مركز كتلة عدة جسيمات

تتألف الأجسام التي ندرسها في الطبيعة من عدد كبير من الذرات والجزيئات التي يمكن أن تكون القوى المتبادلة بينها ضعيفة جداً، بحيث يمكن اعتبار كل واحد منها متحركاً بشكل مستقل عن البقية تنطبق عليه القوانين المختلفة التي حصلنا عليها حتى الآن، كالفازات المخلطة. كما يمكن أن تكون القوى المتبادلة بين جسيمات المنظومة كبيرة لا يمكن إهمالها، كما في الأجسام السائلة والصلبة (الجامدة)، التي يخضع كل جسيم فيها لتأثير القوى الجزيئية والذرية الناتجة عن الجسيمات الأخرى، بالإضافة للقوى الخارجية المؤثرة على النظام ككل. في هذه الحالة يتوجب علينا، عند دراسة حركة منظومة كهذه، متابعة كل جسيم منها على حدة، وتحديد الطريقة التي يتحرك بها تحت تأثير القوى الكلية المؤثرة عليه. لاشك في أن هذا يتطلب عناءً كبيراً، قد يكون مستحيلاً إذا كان عدد جسيمات المنظومة

يتجاوز الإثنين، كما هي الحال بالنسبة للأجسام الصلبة، أو أي منظومة مؤلفة من  $N$  جسيم، حيث نحدد موضع كل واحد في الفضاء بثلاثة إحداثيات مما يعني أنه يجب حل  $3N$  معادلة مرتبطة (coupled equations).

لذلك ندرس حركة منظومة مؤلفة من عدد كبير جداً من الجسيمات، خاضعة لقوى خارجية ما، بتحديد النقطة التي تؤثر عندها محصلة هذه القوى، ثم نحاول دراسة حركة أجزاء المنظومة بالنسبة لهذه النقطة التي نطلق عليها اسم مركز الكتلة (Center of Mass)، وسندرس الآن كيف نحدد موقعها لمنظومات مختلفة.

نعرف موضع مركز كتلة عدة جسيمات نقطية (أي يمكن إهمال أبعاد أي منها بالمقارنة مع المسافة بين أي جسيمين)  $m_1$  و  $m_2$  و  $m_3$  و . . . الخ، موجودة في المواضع  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  و  $\mathbf{r}_3$  و . . . الخ، على الترتيب، كما في الشكل (1-4)، بالعلاقة:

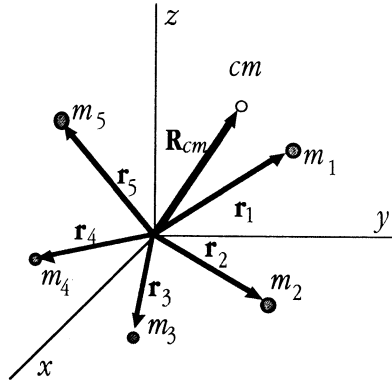
$$(1-4) \quad \mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots}{m_1 + m_2 + \dots}$$

أو

$$(2-4) \quad M \mathbf{R}_{cm} = m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots$$

حيث  $M$  الكتلة الكلية للجسيمات :

$$(3-4) \quad M = m_1 + m_2 + \dots$$



الشكل (1-4)

تجدر الإشارة هنا الى أن مركز كتلة نظام ما لا يقع بالضرورة "داخل" النظام، كما أنه قد لا ينطبق على أي نقطة منه، كمركز كتلة حلقة دائرية متجانسة الذي يقع عند نقطة المركز (الخالية) طبعاً.

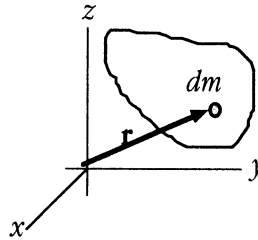
يمكن كتابة العلاقة (2-4) بدلالة مركباتها على المحاور الإحداثية بالشكل:

$$(4-4) \quad \begin{cases} MX_{cm} = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots \\ MY_{cm} = m_1y_1 + m_2y_2 + \dots \\ MZ_{cm} = m_1z_1 + m_2z_2 + \dots \end{cases}$$

### 3-4 مركز كتلة جسم صلب (Center of Mass of Rigid Bodies)

يمكن تحويل العلاقة (1-4) ليجاد موضع مركز كتلة جسم صلب (مستمر) بتجزئته إلى عدد كبير جداً من الجسيمات العنصرية اللامتناهية في الصغر بحيث يمكن اعتبار أي منها نقطة مادية  $dm$  حجمها  $dV$  صغير جداً بحيث يمكن تحديد موضعه بمتجه  $\mathbf{r}$ ، كما في الشكل (2-4). عندها يصير موضع مركز الكتلة معطى بـ:

$$(5-4) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm$$



الشكل (2-4)

بتعريف الكثافة الحجمية (الموضعية) (local volume density) للمادة في الجسم الصلب عند الموضع  $\mathbf{r}$  بالعلاقة:

$$(6-4) \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{dm}{dV}$$

تصير العلاقة (5-4):

$$(7-4) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_V \mathbf{r} \rho \, dV$$

حيث  $V$  حجم الجسم الصلب كله.

يمكن الحصول على مركبات متجه موضع مركز الكتلة من (7-4) فنكتب:

$$(8-4) \quad Z = \frac{1}{M} \int_V z \rho \, dV, \quad Y = \frac{1}{M} \int_V y \rho \, dV, \quad X = \frac{1}{M} \int_V x \rho \, dV$$

لو كان الجسم الصلب مستوياً، بكثافة سطحية  $\sigma = dm/dS$  حيث  $S$  مساحة الجسم عندئذ تؤول العلاقة (7-4) إلى:

$$(9-4) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_S \mathbf{r} \sigma \, dS$$

بنفس الشكل، لو كان الجسم متوزعاً بشكل طولي بكثافة خطية  $\lambda = dm/dl$ ، حيث  $l$  طول الجسم، لأصبحت (7-4) بالشكل :

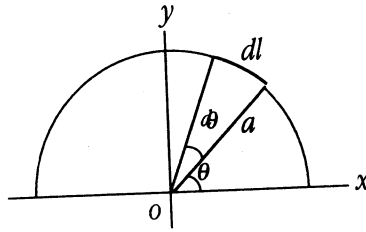
$$(10-4) \quad \mathbf{R} = \frac{1}{M} \int_l \mathbf{r} \lambda \, dl$$

#### □ مثل 1-4 مركز كتلة نصف دائرة

لنعتبر سلكاً على شكل نصف دائرة نصف قطرها  $a$  ولنحسب موضع مركز كتلته، فنأخذ منه جزءاً عنصرياً طوله  $dl$ ، كما في الشكل (3-4) ونكتب من (10-4) :

$$X = \frac{1}{M} \int_l x \lambda \, dl$$

$$Y = \frac{1}{M} \int_l y \lambda \, dl$$



الشكل (3-4)

باستخدام الإحداثيات القطبية  $(r, \theta)$ ، نكتب:

$$x = a \cos \theta$$

$$y = a \sin \theta$$

كما نلاحظ من الشكل (3-4) أن:

$$dl = a d\theta$$

لذلك يكون:

$$X = \frac{1}{M} \int_0^\pi (a \cos \theta)(\lambda a d\theta) = 0$$

$$Y = \frac{1}{M} \int_0^\pi (a \sin \theta)(\lambda a d\theta) = \frac{2a^2 \lambda}{M}$$

كما أن كتلة السلك هي:

$$M = (\pi a) \lambda$$

لذا تصير:  $Y = \frac{2a}{\pi}$

$$Y = 2a/\pi$$

فموضع مركز الكتلة يقع على محور الصادات ( $oy$ ) وهذا متوقع من تناظر السلك بالنسبة لهذا المحور.

□

□ مثل 24 مركز كتلة نصف قرص متجانس

لحساب موضع مركز كتلة نصف قرص رقيق متجانس نصف قطره  $a$  نجزئه إلى شرائح رقيقة موازية لمحور السينات طول كل منها  $2x$  وعرضها  $dy$ ، كما في الشكل

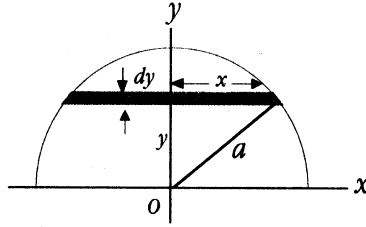
(4-4)، ونستخدم (5-6) لنكتب:

$$X = \frac{1}{M} \int_S x \sigma dS$$

$$Y = \frac{1}{M} \int_S y \sigma dS$$

حيث يعطى السطح العنصري  $dS$  بالعلاقة:

$$dS = 2x dy$$



الشكل (4-4)

كما أن:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

فيكون

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow dy = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

أي أن:

$$X = \frac{1}{M} \int_a^0 \sigma(x)(2x)\left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = 0$$

و

$$Y = \frac{1}{M} \int_a^0 \sigma \sqrt{a^2 - x^2} (2x) \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right) dx = \frac{2\sigma a^3}{3M}$$

بملاحظة أن كتلة نصف القرص هي :

$$M = \left(\frac{1}{2} \pi a^2\right) \sigma$$

$$y = \frac{4a}{3\pi}$$

فيقع مركز الكتلة، في هذه الحالة، أيضاً، على  $oy$  بسبب التناظر. من الواضح أن موضع مركز كتلة جسم صلب يعتمد على شكل الجسم فقط لاعلى اختيارنا للمحاور الإحداثية، بمعنى أن موضع مركز كتلة نصف قرص متجانس سيبقى عند نفس النقطة التي وجدناها فيما سبق سواء اخترنا المحاور بالطريقة السابقة أم لا.

#### 4 - 4 مركز كتلة جسم صلب متجانس ومتناظر

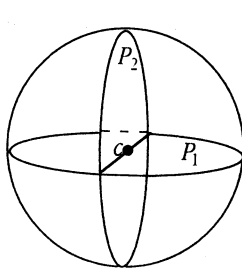
إذا كان الجسم الصلب متجانساً ومتناظراً بالنسبة لنقطة، أو محور، أو مستو، فيمكن الاستفادة من ذلك لإيجاد مركز كتلته بسهولة. نلخص فيما يلي نصوص بعض النظريات المتعلقة بذلك:

1- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لمستو فإن مركز كتلته يقع في ذلك المستوي.  
2- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لمستويين فإن مركز كتلته يقع على خط تقاطعهما.

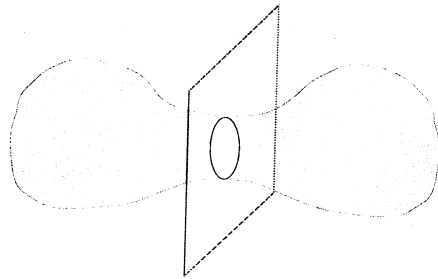
3- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لثلاثة مستويات متقاطعة في نقطة واحدة فإن مركز كتلته يقع عندها.

4- إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لنقطة فإن مركز كتلته يقع عند تلك النقطة.  
كمثل على الحالة 1: نعتبر الجسم الموضح في الشكل (4-5 أ) فنلاحظ أنه متناظر بالنسبة للمستوي  $P$  (أي أنه من أجل كل نقطة في الطرف الأيمن من الجسم توجد نقطة مماثلة، على نفس البعد منه في الطرف الأيسر من الجسم)، لذلك يجب أن يقع مركز كتلة الجسم في هذا المستوي.

كمثل لبقية الحالات 2 و 3 و 4: نعتبر الكرة المتجانسة الموضحة بالشكل (4-5 ب)، فهي متناظرة بالنسبة للمستويين  $P_1$  و  $P_2$  فيجب أن يقع مركز كتلتها على خط تقاطعهما، كما أنها متناظرة بالنسبة للنقطة  $O$  (مركزها الهندسي)، بالتالي فهذه النقطة هي مركز كتلتها، كما هو معروف.



(ب)



(أ)

الشكل (5-4)

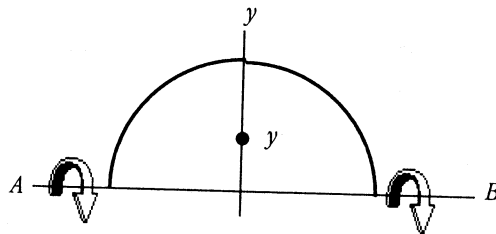
#### 5-4 نظريتا بابس (Pappus Theorems)

يمكن، في كثير من الأحيان، اختصار العمليات الرياضية اللازمة لحساب موضع مركز كتلة جسم صلب متجانس، متوزع بشكل طولي أو سطحي، باستخدام نظريتي بابس اللتين نلخصهما فيمايلي:

##### (أ) نظرية بابس الأولى: مركز كتلة منحنى مستو

"المساحة الناتجة عن دوران منحنى مستو حول محور لا يتقاطع معه تساوي طول المنحنى مضروباً بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران".  
 كتطبيق لنظرية بابس الأولى نعود لحساب موضع مركز كتلة سلك منحنى على شكل نصف دائرة، فنلاحظ أن المساحة الناتجة عن دوران هذا المنحنى حول المحور AB في الشكل (6-4) تساوي مساحة كرة نصف قطرها  $a$ ، فنكتب:

$$S = 4\pi a^2$$



الشكل (6-4)



بحسب نظرية بابس الأولى، بما أن مركز الكتلة يقع على المحور  $oy$ ، بسبب التناظر، نكتب:

$$4\pi a^2 = (\pi a)(2\pi y)$$

حيث ترمز  $y$  لموضع مركز الكتلة على  $oy$ .  
ف نجد من العلاقة السابقة أن:

$$y = \frac{2a}{\pi}$$

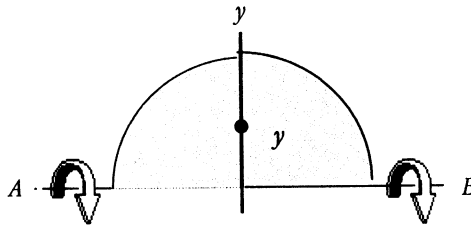
وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها في المثال (1-4) بوساطة التكامل.

#### (ب) نظرية بابس الثانية: مركز كتلة صفيحة مستوية

"الحجم الناتج عن دوران قطعة مستوية حول محور في مستويها، لا يتقاطع معها إلاً عند طرفها، تساوي مساحة القطعة مضروبة بالمسافة التي يقطعها مركز الكتلة خلال الدوران"

كمثال على نظرية بابس الثانية، نحدد مركز كتلة نصف قرص متجانس، فنديره حول المحور  $AB$ ، كما في الشكل (7-4)، ونلاحظ أن الحجم الناتج هو كرة، أي أن:

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$



الشكل (7-4)

بحسب التناظر، فإن مركز الكتلة يقع على  $oy$ ، لذلك نكتب:

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = (\frac{1}{2}\pi a^2)(2\pi y)$$

حيث  $\pi d^2/2$  مساحة نصف القرص طبعاً.

بالتالي نجد:

$$y = \frac{4a}{3\pi}$$

وهي نفس النتيجة التي وجدناها سابقاً أيضاً.

#### 4-6 الزخم الخطي لعدة جسيمات ومبدأ حفظ الزخم الخطي

سنحدد في هذه الفقرة السرعة التي يتحرك بها مركز كتلة منظومة ما عندما تتحرك أجزاؤها، ونربط بين سرعة هذا المركز وسُرْع مركبات المنظومة .  
نشق (2-4) فنجد:

$$(11-4) \quad M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3 + \dots$$

لكن:

$$m_i\dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p}_i$$

حيث  $\mathbf{p}_i$  الزخم الخطي للجسيم  $i$ ، كما أن:

$$\mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm}$$

حيث  $\mathbf{P}_{cm}$  الزخم الخطي لمركز الكتلة. لذلك نكتب (11-4) بالشكل:

$$(12-4) \quad \mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n$$

فالزخم الخطي لمركز الكتلة يساوي مجموع الزخم الخطي لكل الجسيمات.

باشتقاق (12-4) نجد:

$$(13-4) \quad \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} + \dots$$

لكن:

$$\frac{d\mathbf{P}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$$

حيث  $\mathbf{F}_i$  محصلة القوى المؤثرة على الجسيم  $i$ ، التي تساوي مجموع القوى الداخلية المتبادلة بينها وبين بقية أجزاء المنظومة، بالإضافة للقوى الخارجية عن المنظومة. بفرض أن محصلة القوى الداخلية المتبادلة بين أجزاء المنظومة كلها تساوي الصفر يكون:

$$(14-4) \quad \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt} = M\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots = \mathbf{F}_{ext}$$

حيث  $\mathbf{F}_{ext}$  هي محصلة القوى الخارجية المؤثرة على المنظومة. لذا نكتب (14-4) بالشكل:

$$(15-4) \quad \mathbf{F}_{ext} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \frac{d\mathbf{P}_{cm}}{dt}$$

أي أن محصلة القوى الخارجية المؤثرة على كل الجسيمات تساوي نسبة تغير الزخم الخطي لمركز الكتلة.

**فمركز الكتلة يتحرك كجسم له كتلة الجسيمات كلها وخاضع لمحصلة القوى الخارجية المؤثرة عليها.**

لهذه النتيجة أهمية كبيرة عند دراسة الحركة الانتقالية، أو الانسحابية، للأجسام الكبيرة الصلبة والمنظومات، إذ نعتبر الجسم نقطة مادية متوضعة عند مركز الكتلة خاضعة لمحصلة القوى الخارجية، وندرس حركتها تحت تأثير هذه المحصلة كما فعلنا في الفصل الأول.

نستنتج من العلاقة (15-4) أنه إذا كان:

$$(16-4) \quad \mathbf{F}_{ext} = 0$$

عندئذ يكون :

$$(17-4) \quad \mathbf{P}_{cm} = M\dot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n = \text{ثابت}$$

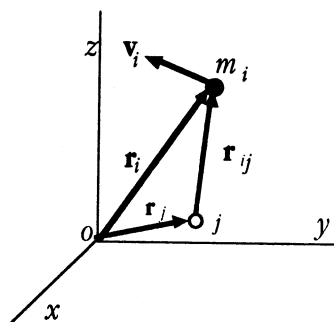
هذا هو مبدأ حفظ الزخم الخطي (Conservation of Linear Momentum) لعدة جسيمات يستفاد من مبدأ حفظ الزخم الخطي، بشكل رئيس، لدراسة حادثة التصادم.

#### 7-4 الزخم الزاوي لعدة جسيمات ومبدأ حفظ الزخم الزاوي

لنفترض أن لدينا جسيماً  $m_i$  في الموضع  $\mathbf{r}_i$  ولنحدد زخمه الزاوي بالنسبة للنقطة  $j$  المحددة بالمتجه  $\mathbf{r}_j$ ، كما في الشكل (8-4)، فنكتب:

$$(18-4) \quad \mathbf{L}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} \times m_i \mathbf{v}_i = \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_i$$

حيث  $\mathbf{v}_i$  سرعة الجسيم  $i$ ، بينما  $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$  متجه من النقطة  $j$  إلى موضع الجسيم  $i$ .



الشكل (8-4)

إذا كانت الجسيمات  $m_1$  و  $m_2$  و  $\dots$  و  $m_N$  موزعة في المواضع  $\mathbf{r}_1$  و  $\mathbf{r}_2$  و  $\dots$  و  $\mathbf{r}_N$ ، عندئذ يكون الزخم الزاوي الكلي لها بالنسبة للنقطة  $j$  هو:

$$(19-4) \quad \mathbf{L}_j = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_{ij} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_i)$$

لنفترض الآن أن النقطة  $j$  ثابتة، أي أن  $\dot{\mathbf{r}}_j = 0$ ، عندئذ نجد من العلاقة السابقة:

$$(20-4) \quad \frac{d\mathbf{L}_j}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \left[ \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} \times \mathbf{p}_i + \mathbf{r}_{ij} \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} \right]$$

لكن:

$$\sum_i \frac{d\mathbf{r}_{ij}}{dt} \times \mathbf{p}_i = \sum_i \frac{d(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{dt} \times \mathbf{p}_i = \sum_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i = 0$$

كما أن:

$$\sum_i \mathbf{r}_{ij} \times \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_i$$

فإذا وضعنا:

$$(21-4) \quad \boldsymbol{\tau}_j = \sum_i \mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{F}_i$$

حيث تدل  $\boldsymbol{\tau}_j$  على عزم القوى الخارجية الكلية المؤثرة على الأجسام بالنسبة للنقطة  $j$  وذلك بفرض أن عزم القوى الداخلية المتبادلة بين هذه الجسيمات بالنسبة لـ  $j$  معدوم. من ثم تؤول (20-4) إلى:

$$(22-4) \quad \boldsymbol{\tau}_j = \frac{d\mathbf{L}_j}{dt}$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن معدل تغير الزخم الزاوي الكلي لمنظومة جسيمات حول نقطة بالنسبة للزمن تساوي عزم القوى الخارجية الكلي حول هذه النقطة. هذا هو قانون نيوتن الثاني في الحركة الدورانية.

نلاحظ من (22-4) أنه إذا كانت محصلة العزوم المؤثرة على منظومة بالنسبة لنقطة ما تساوي الصفر فإن الزخم الزاوي الكلي لهذه المنظومة بالنسبة لنفس النقطة لا يتغير.

(23-4)

$$\tau_j = 0 \Rightarrow L_j = \text{ثابت}$$

هذا هو مبدأ حفظ الزخم الزاوي (Conservation of Angular Momentum).

إن مبدأ حفظ الزخم الزاوي من أهم مبادئ الحفظ في الفيزياء، خاصة في الفيزياء الكمية، لأن أهم القوى الطبيعية، كالجاذبية والكهربائية، مركزية وعزمها معدوم بالنسبة لمركز القوة، لذا فإن المنظومات الطبيعية، كالذرات أو الأجرام السماوية، تتحرك بزخم زاوي ثابت دوماً وهي في حالة مستقرة.

#### 8-4 الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات ومبدأ حفظ الطاقة

نكتب الطاقة الحركية لمنظومة جسيمات بالشكل:

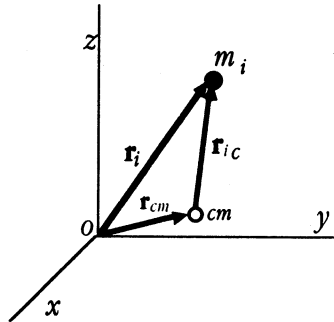
(24-4)

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

فإذا حددنا موضع الجسيم  $m_i$  بالنسبة لمراقب ثابت بالمتجه  $\mathbf{r}_i$ ، وبالنسبة لمركز الكتلة بالمتجه  $\mathbf{r}_{ic}$ . كما نحدد موضع مركز الكتلة بالنسبة لنفس المراقب الثابت بالمتجه  $\mathbf{r}_{cm}$ ، كما في الشكل (9-4)، فنجد:

(25-4)

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{ic} + \mathbf{r}_{cm}$$



الشكل (9-4)

بالاشتقاق يكون:

(26-4)

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm}$$

حيث  $\mathbf{v}_{cm}$  سرعة مركز الكتلة، بينما  $\mathbf{v}_{ic}$  سرعة الجسيم بالنسبة لهذا المركز.  
من ثم نكتب (24-4) بالشكل:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm}) \cdot (\mathbf{v}_{ic} + \mathbf{v}_{cm})$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{ic}^2 + \sum_i m_i (\mathbf{v}_{ic} \cdot \mathbf{v}_{cm})$$

لكن:

$$\sum_i m_i (\mathbf{v}_{ic} \cdot \mathbf{v}_{cm}) = 0$$

(برهن صحة هذه العلاقة)، كما أن:

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{c.m.}^2 = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{c.m.}^2 \sum_i m_i = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{c.m.}^2$$

فتصير  $T$  بالشكل:

$$(27-4) \quad T = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{c.m.}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^2$$

فالطاقة الحركية لمنظومة جسيمات هي مجموع الطاقة الحركية للحركة الانتقالية لمركز الكتلة (الحد الأول من الطرف الايمن من (27-4)) بالإضافة لمجموع الطاقة الحركية لكل الجسيمات بالنسبة لمركز الكتلة (الحد الثاني من الطرف الأيمن من (27-4)).

من جهة أخرى، إذا كانت القوى المؤثرة على المنظومة محافظة، عندئذ يمكن ايجاد طاقة وضع من الشكل:

$$(28-4) \quad V = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

أي تعتمد على مواضع الجسيمات فقط. عندئذ نكتب الطاقة الميكانيكية الكلية للمنظومة بالشكل:

$$(29-4) \quad E = T + V = \frac{1}{2} M \mathbf{v}_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_{ic}^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

في هذه الحالة، يمكن إيجاد القوة المؤثرة على الجسيم من طاقة وضعه بكتابة:

$$(30-4) \quad \mathbf{F}_i = -\nabla_i V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$$

حيث يدل المؤثر  $\nabla_i$  (operator) على أن عملية الاشتقاق تتم بالنسبة للجسيم  $i$ .  
من ثم نجد مركبات  $\mathbf{F}_i$  على المحاور الإحداثية بكتابة:

$$(31-4) \quad F_{iz} = -\frac{\partial V}{\partial z_i}, \quad F_{iy} = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad F_{ix} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

#### 9-4 التصادمات (Collisions)

مسألة تصادم جسمين ببعضهما من أهم المسائل في الفيزياء لأنها بسيطة الدراسة لكن غنية بما تعطية من معلومات عن الأجسام المتصادمة وطبيعة التصادم. تنقسم التصادمات إلى قسمين:

(أ) التصادمات المرنة: وهي التي تبقى فيها الطاقة الكلية للجسيمات المتصادمة قبل وبعد التصادم ثابتة لا تتغير.

(ب) التصادمات غير المرنة: وهي التي تختلف فيها الطاقة الكلية للجسيمات المتصادمة قبل التصادم عن الطاقة الكلية بعد التصادم.

#### 9-4-1 التصادمات المرنة (Elastic Collisions):

ليكن لدينا جسمان  $m_1$  و  $m_2$  يصطدمان ببعضهما بحيث أن زخمها الخطي قبل التصادم هو  $\mathbf{p}_1$  و  $\mathbf{p}_2$  ، على الترتيب، وبعد التصادم  $\mathbf{p}'_1$  و  $\mathbf{p}'_2$  على الترتيب أيضاً. عندئذ نستعمل مبدأي حفظ الزخم والطاقة فنكتب:

$$(32-4) \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$$

$$(32-4) \quad T_1 + T_2 = T'_1 + T'_2$$

و



يمكن كتابة العلاقة (33-4) بالشكل:

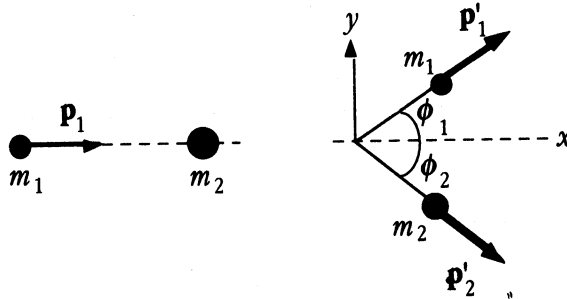
$$(34-4) \quad \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

حيث وضعنا:

$$T_i = \frac{p_i^2}{2m_i}$$

حالة خاصة: الجسم  $m_2$  ساكن قبل التصادم؛ عندئذ نجد من العلاقتين (32-4) و (33-4) والشكل (10-4):

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1' \cos \phi_1 + p_2' \cos \phi_2 \\ 0 &= p_1' \sin \phi_1 - p_2' \sin \phi_2 \\ p_1^2 &= p_1'^2 + \frac{m_2}{m_1} p_2'^2 \end{aligned}$$



الشكل (10-4)

باختصار  $\phi_2$  من المعادلات السابقة نجد:

$$(35-4) \quad \frac{p_1'}{p_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cos \phi_1 \pm \sqrt{\left( \frac{m_1 \cos \phi_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}$$

تعطي (35-4) نسبة الزخم الخطي للجسم الأول بعد التصادم بالنسبة لزمخه الخطي قبل التصادم.

نميز هنا الحالات التالية :

(أ)  $m_1 > m_2$  حيث نلاحظ أن المقدار:

$$\sqrt{\left(\frac{m_1 \cos \phi_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}}$$

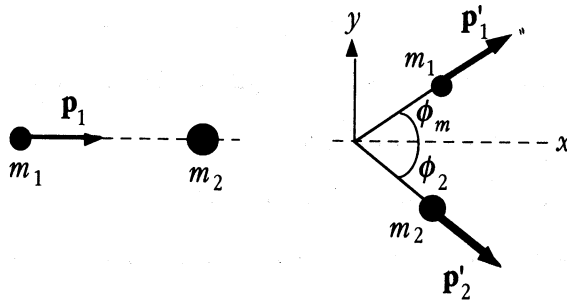
سيصير مساوياً للصفر عندما  $\phi_1 = \phi_m$  حيث:

$$\left(\frac{m_1 \cos \phi_m}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

أي أن:

$$(30-4) \quad \cos^2 \phi_m = 1 - \frac{m_2^2}{m_1^2}$$

نلاحظ أن  $\phi_1$  لا يمكن أن تكون أكبر من  $\phi_m$  وإلا فإن  $\cos \phi_1 < \cos \phi_m$  مما سيجعل المقدار المجنورفي العلاقة (29-4) سالباً وهذا غير ممكن طبعاً. لذا نستنتج أنه عندما يصطدم جسيم ثقيل  $m_1$  بجسيم أخف منه  $m_2$  فإنه لا يمكن أن يتشتت عن مساره بزاوية أكبر من  $\phi_m$  المعطاة بالمعادلة (30-4) كما في الشكل (11-4).



الشكل (11-4)

نستنتج من (35-4) أنه عندما تكون  $\phi_1 < \theta_m$  فإن  $p_1$  يمكن أن تأخذ قيمتين

أحدهما كبيرة تدل على تصادم جانبي (*glancing collision*)، والثانية صغيرة تدل على تصادم رأسي (*head-on collision*) تقريباً.

(ب)  $m_1 = m_2$ : نلاحظ في هذه الحالة من المعادلة (35-4) أن:

$$(36-4) \quad \begin{cases} p'_1 = p_1 \cos \phi_1 \\ p'_2 = p_1 \sin \phi_1 \end{cases}$$

من الواضح أن  $\phi_1$  تتغير بين  $\phi_1 = 0$  (لا تصادم) إلى  $\phi_1 = \pi/2$ .

(ج)  $m_1 < m_2$ : في هذه الحالة يمكن أن تأخذ  $\phi_1$  كل القيم من  $\phi_1 = 0$  (لا تصادم) إلى  $\phi_1 = \pi$  (أي ارتداد أو تشتت خلفي) (*backscattering*).

في حالة الارتداد الخلفي فإن  $\phi_1 = \pi$  و  $\phi_2 = 0$ ، ويعطى الزخم الخطي للجسيمين المتصادمين بعد التصادم بدلالة الزخم الابتدائي للجسيم القادم على النحو:

$$(38-4) \quad \begin{cases} p'_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} p_1 \\ p'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} p_1 \end{cases}$$

#### 4 - 9 - 2 التصادمات غير المرنة (*Inelastic Collisions*):

نقسم التصادمات غير المرنة إلى قسمين :

(أ) التصادمات غير المرنة كلياً (*Totally Inelastic Collisions*) يتغير فيها عدد

الأجسام المتصادمة نتيجة التصادم، كأن تلتصق الجسيمات المتصادمة ببعضها وتصبح جسماً واحداً، أو أن ينشطر جسم إلى جسيمين أو أكثر.

(ب) التصادمات غير المرنة جزئياً (*Partially Inelastic Collisions*) تبقى فيها

الجسيمات المتصادمة منفصلة عن بعضها وإن اختلفت كتلتها نتيجة للتصادم.

في كلا الحالتين من التصادمات غير المرنة نكتب من مبدئي حفظ الزخم والطاقة

$$(39-4) \quad \begin{cases} \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \\ T_1 + T_2 - (T'_1 + T'_2) = Q \end{cases}$$

حيث  $Q$  الفرق في الطاقة الكلية للأجسام قبل وبعد التصادم.  
إذا كانت  $Q > 0$  فان بعض الطاقة تتحرر نتيجة التصادم ونقول إن التصادم مُصْدِرٌ للطاقة (exoergic)، وإذا كانت  $Q < 0$  فان التصادم بحاجة لبعض الطاقة حتى يتم، ونقول إن التصادم ماص للطاقة (endoergic).

### (أ) التصادمات غير المرنة كلياً

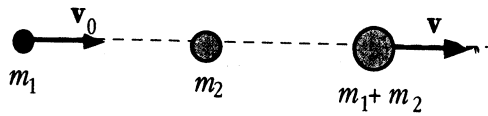
سندرس حالة اصطدام جسم  $m_1$  يسير بسرعة  $v_0$  مع جسم ثانٍ  $m_2$  ساكن ( $v_2 = 0$ ) بحيث يلتصق به بعد التصادم، كما في الشكل (12-4)، فنجد من مبدأ حفظ الزخم :

$$(40-1) \quad m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v$$

حيث  $v$  سرعة الجسمين بعد التصادمهما ببعضهما.  
يمكن البرهان أن الطاقة لا تبقى محفوظة في هذه الحالة بل يضيع جزء منها مساوٍ إلى:

$$(41-1) \quad Q = \frac{1}{2} m_1 v_0^2 \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) = \left( \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) T_0$$

حيث  $T_0$  الطاقة الحركية الأصلية للجسم الأول.

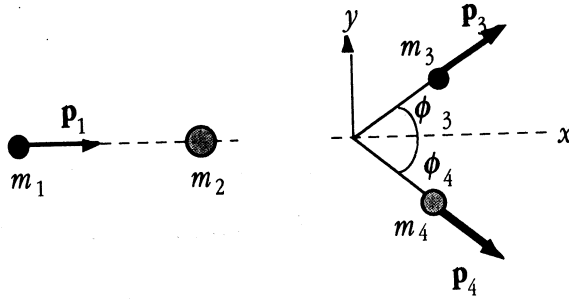


الشكل (12-4)

### (ب) التصادمات غير المرنة جزئياً

لنعتبر تصادم جسم  $m_1$  زخمه الخطي  $p_1$  بجسم ساكن  $m_2$  بحيث يؤدي التصادم لإنتاج جسمين جديدين  $m_3$  و  $m_4$ ، كما هو موضح بالشكل (13-4)، عندئذ نكتب من مبدأ حفظ الزخم:

$$p_1 = p'_1 + p'_2$$



الشكل (13-4)

باختيار المحاور الإحداثية كما في الشكل (13-4) نجد من العلاقة السابقة:

$$(42-4) \quad \begin{cases} p_1 = p_3 \cos \phi_3 + p_4 \cos \phi_4 \\ 0 = p_3 \sin \phi_3 - p_4 \sin \phi_4 \end{cases}$$

كما نكتب من مبدأ حفظ الطاقة:

$$(43-4) \quad T_1 - (T_3 + T_4) = Q$$

باختصار  $\phi_4$  من المعادلتين (42-4) نجد:

$$(44-4) \quad p_4^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 \cos \theta_3$$

بوضع  $T = p^2/2m$  في العلاقة السابقة نحصل على قيمة الطاقة الضائعة (أو المكتسبة):

$$(45-4) \quad Q = T_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_4}\right) - T_3 \left(1 + \frac{m_1}{m_4}\right) + 2\sqrt{(m_1 m_3 / m_4^2)} T_1 T_3 \cos \phi_3$$

تستعمل العلاقة (45-4) في الفيزياء النووية لمعرفة القيمة  $Q$  (Q-value) الناتجة عن أو الضرورية لإجراء أي تفاعل نووي.

#### 4 - 10 معامل الارتداد (Coefficient of Restitution)

عندما يصطدم جسمان  $m_1$  و  $m_2$  ببعضهما اصطداماً رأسياً (على نفس الخط) فإن هناك علاقة تربط بين سرعتيهما النسبية قبل وبعد التصادم. إذ وجد تجريبياً أن:

$$v_2' - v_1' = e(v_1 - v_2) \quad (4-46)$$

حيث  $v_1$  و  $v_2$  سرعتيهما قبل التصادم و  $v_1'$  و  $v_2'$  سرعتيهما بعد التصادم، على الترتيب بينما يدعى  $e$  معامل الارتداد (coefficient of restitution) وتتراوح قيمته بين 0 في حالة تصادم غير مرن كلياً و 1 في حالة تصادم مرّن تماماً.

ترمز  $v_2 - v_1$  لسرعة التقارب النسبية (relative speed of approach) بينما ترمز  $v_2' - v_1'$  لسرعة التباعد النسبية (relative speed of separation). يمكن استخدام العلاقة (4-46) بالإضافة الى مبدأ حفظ الزخم لدراسة حادثة تصادم جسمين بشكل رأسي على خط مستقيم.

#### 4 - 11 مسألة الجسمين (The Two -Body Problem)

سنعتبر في هذه الفقرة حركة منظومة مؤلفة من جسمين  $m_1$  و  $m_2$  يؤثران على بعضهما بقوتين متبادلتين خاضعتين لقانون نيوتن الثالث فقط. لهذه المسألة أهمية خاصة لأنها تنطبق على أهم المنظومات الطبيعية كالأرض والقمر، أو الأرض والشمس، أو الإلكترون والبروتون في ذرة الهيدروجين، وهكذا دواليك. فإذا رمزنا لموضع الجسمين بـ  $r_1$  و  $r_2$  بالنسبة لمراقب ثابت  $O$ ، كما في الشكل (4-14)، عندئذ نكتب من قانون نيوتن الثاني:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{1i} + \mathbf{F}_{1e} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{2i} + \mathbf{F}_{2e} \end{cases} \quad (4-47)$$

حيث تشير  $\mathbf{F}_{1i}$  (أو  $\mathbf{F}_{2i}$ ) الى القوة الداخلية التي يؤثر بها  $m_2$  (أو  $m_1$ ) على  $m_1$  (أو  $m_2$ ) على الترتيب.

حسب قانون نيوتن الثالث فان: